Universidad Simón Bolívar - Probabilidad para Ingenieros – CO3121 –Segundo Examen (35%)
Profesores: Zoraida Martínez, Hugo M. Montesinos y Mayra Rodríguez.

Profesor de su sección:

Nombre: ____**Hugo M. Montesinos**_______________ Carné.: _________**Clave/Guía de solución**__________

Examen 2 Tipo-A: 35%. Sep-Dic.2013. Duración: 1 hora y 50 minutos

*El examen es estrictamente **individual**. Se permite el uso de calculadora. El examen consta de 3 preguntas (3 páginas) que totalizan 35 puntos. Verifique que tiene las 3 páginas. Responda cada pregunta **solamente en la hoja de dicha pregunta**. Puede usar el reverso de la hoja si necesita más espacio.*

Pregunta 1. *(10 puntos)* El costo de producción de cierta máquina que se fabrica por encargo es, para nuestra empresa, 4.5×10^7 Bs. por máquina, cuando se producen menos de 4 unidades. Si se producen de 4 a 7 unidades, inclusive, el costo baja a 4.0×10^7 Bs. por máquina, y cuando se producen 8 unidades o más, el costo por unidad baja a 3.5×10^7 Bs. La demanda de estas máquinas fluctúa según una distribución Poisson(6). Hallar:

1. (*5 puntos*) El precio de venta unitario, para que la ganancia esperada por máquina sea 5 millones de bolívares.
2. (*5 puntos*) Con el precio hallado en 1., ¿Cuál es la probabilidad de que nuestra empresa pierda dinero?

SOLUCIÓN:

Sea X=#de unidades demandadas. X es Poisson(6).

Luego $P(X=k) = \frac{6^k e^{-6}}{k!}$.

$$P(X<4) = e^{-6}\left(\frac{6^0}{0!}+\frac{6^1}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}\right) = 0.151203$$

$$P(4 \le X \le 7) = e^{-6}\left(\frac{6^4}{4!}+\frac{6^5}{5!}+\frac{6^6}{6!}+\frac{6^7}{7!}\right) = 0.5927759$$

$$P(X>7) = 1 - 0.151203 - 0.5927759 = 0.2560202$$

El costo C por máquina es:

$$C = \begin{cases} 4.5 \ con\ probabilidad\ 0.151203 \\ 4.0 \ con\ probabilidad\ 0.5927759 \\ 3.5 \ con\ probabilidad\ 0.2560202 \end{cases}$$

Por lo tanto el costo esperado por máquina es:

$$\begin{aligned} E(C) &= 4.5 * 0.151203 \\ &+4.0 * 0.5927759 \\ &+3.5 * 0.2560202 \\ E(C) &= 3.947588 \end{aligned}$$

[todo en 1×10^7 Bs.]

Si P y G son el precio y la ganancia por máquina, respectivamente, entonces:

$$G = P - C$$

(Ganancia=Precio – Costo). Luego, tomando esperanza, y usando que piden que la ganancia esperada sea 5 MM de Bs.:

$$5 \times 10^6 \text{ Bs} = P - 3.947588 \times 10^7 \text{ Bs}$$

$$\boxed{P = 4.447588 \times 10^7 \text{ Bs}}$$

Con este precio, la ganancia unitaria es:

$$G = \begin{cases} -0.052412 \ con\ probabilidad\ 0.151203 \\ 0.447588 \ con\ probabilidad\ 0.5927759 \\ 0.947588 \ con\ probabilidad\ 0.2560202 \end{cases}$$

<u>Claramente la probabilidad de que la empresa pierda dinero, con este precio es 0.151203. Es la probabilidad de que la demanda sea menor que 4 unidades.</u>

<u>Nota</u>: Este ejercicio también podía verse considerando la función de costo

$$C = \begin{cases} 0 \ \ con\ prob.\ P(X=0) \\ 4.5 \ con\ prob.\ P(1 \le X \le 3) \\ 4.0 \ con\ prob.\ P(4 \le X \le 7) \\ 3.5 \ con\ prob.\ P(X>7) \end{cases}$$

La respuesta es muy parecida puesto que $P(X=0) = e^{-6}$ es muy baja. Sin embargo, ambos resultados y procedimientos se consideran correctos. El primero, implica costos fijos cuando X=0. El segundo, no.

Universidad Simón Bolívar - Probabilidad para Ingenieros – CO3121 –Segundo Examen (35%)
Profesores: Zoraida Martínez, Hugo M. Montesinos y Mayra Rodríguez.

Profesor de su sección:

Nombre: ____**Hugo M. Montesinos**_______________ Carné.: _________**Clave/Guía de solución**__________

Pregunta 2. *(15 puntos)* Sea $Z \sim Geo(p)$. (suponga que la geométrica cuenta el número de intentos hasta obtener el primer éxito en una sucesión de experimentos independientes Bernoulli con probabilidad de éxito p).

1. (*5 puntos*) Demuestre que para cualquier entero positivo a, $P(Z > a) = (1-p)^a$
2. (*5 puntos*) Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas con distribución $Geo(p)$. Considere la función $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Hallar $P(U = k)$ para todo k.
3. (*5 puntos*) Demuestre la propiedad de pérdida de memoria para U. Es decir, demuestre que para cualesquiera enteros positivos a y b, se cumple que $P(U > a + b | U > a) = P(U > b)$

SOLUCIÓN:

1. Que haya más de a intentos hasta el 1er éxito es lo mismo que no haya éxitos en los primeros a intentos. Es decir, que haya a fracasos en los primeros a intentos. Luego la probabilidad pedida es $(1-p)^a$. ■
(se podía hacer también por sumatoria).

2. Se vio en clases que $P(U > a) = \left(P(Z > a)\right)^n$
Hay quienes tienen en sus fórmulas:
$$F_U(a) = P(U \le a) = 1 - \left(1 - F_Z(a)\right)^n$$
Todo esto es equivalente. Luego:
$$P(U > a) = ((1-p)^a)^n = ((1-p)^n)^a$$
Por lo tanto $U \sim Geo\,(1 - (1-p)^n)$ y por ende
$$P(U = k) = \begin{cases} (1-p')^{k-1}p' & si\ k = 1,2,\dots \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$
donde $p' = 1 - (1-p)^n$

3. $P(U > a + b | U > a) = \frac{P((U > a+b) \cap (U > a))}{P(U > a)}$
$$= \frac{P(U > a + b)}{P(U > a)} = \frac{(1-p)^{n(a+b)}}{(1-p)^{na}}$$
$$= (1-p)^{nb} = P(U > b)$$
■

Si hicieron la guía, saben que cualquier geométrica cumple la propiedad. Podían demostrarlo para Z y luego argumentar que U también es geométrica.

Universidad Simón Bolívar - Probabilidad para Ingenieros – CO3121 –Segundo Examen (35%)
Profesores: Zoraida Martínez, Hugo M. Montesinos y Mayra Rodríguez.

Profesor de su sección:

Nombre: ____**Hugo M. Montesinos**_______________ Carné.: _________**Clave/Guía de solución**__________

Pregunta 3. *(10 puntos)* Un lote de producción consta de 8000 artículos, 16 de los cuales son defectuosos. Un inspector toma uno de los artículos al azar, y si no es defectuoso, lo devuelve al lote. Sea N el número de inspecciones de objetos no defectuosos que se realizan antes de encontrar el primer objeto defectuoso.

1. (*5 puntos*) Calcule $P(15 \leq N \leq 40)$.
2. (*5 puntos*) El lote completo se rechaza y genera pérdidas si $N < 15$, ya que en este caso el inspector niega el permiso de venta. Si $15 \leq N \leq 40$, el lote obtiene los permisos básicos de venta y el precio de cada artículo será 150 Bs. Si $N > 40$, el lote pasa todas las regulaciones y estándares de calidad, y el producto se vende con el sello Premium, a 200 Bs. por unidad. Si el costo de producir cada artículo es 100 Bs. Calcule la ganancia esperada para el lote.

SOLUCIÓN:

1. Sea X=#de artículos inspeccionados **hasta** observar el primer defectuoso. Entonces X~Geo(0.002) y X=N+1. (p=0.002=16/8000) y (1-p=1-0.002=0.998). Luego:

$$
\begin{aligned}
P(15 \leq N \leq 40) &= P(15 \leq X-1 \leq 40) = \\
&= P(16 \leq X \leq 41) = P(X \leq 41) - P(X \leq 15) \\
&= 1 - P(X > 41) - \big(1 - P(X > 15)\big) \\
&= P(X > 15) - P(X > 41) \\
&= 0.998^{15} - 0.998^{41} \\
&= \underline{4.922\%}
\end{aligned}
$$

2. Sea G la ganancia del lote. Entonces

$$
G = \begin{cases} -100 * 8000 & si\ N < 15 \\ (150-100) * 8000 & si\ 15 \leq N \leq 40 \\ (200-100) * 8000 & si\ N > 40 \end{cases}
$$

[todo en Bs.]

Calculamos las probabilidades de cada caso:

$$P(N > 40) = P(X > 41) = 0.998^{41} = 0.9211963$$
$$P(N < 15) = 1 - 0.9211963 - 0.04922 = 0.0295837$$

Entonces

$$
G = \begin{cases} -800000 & con\ probabilidad\ 2.95837\% \\ 400000 & con\ probabilidad\ 4.922007\% \\ 800000 & con\ probabilidad\ 92.11963\% \end{cases}
$$

[todo en Bs.]

Y la ganancia esperada, $E(G)$, es (en bolívares):

$$8000 * [-100 * 2.96\% + 50 * 4.92\% + 100 * 92.12\%]$$

$$\boxed{E(G) = 732978.1\ Bs.}$$

■

(En los cálculos intermedios se usaron todos los decimales) Claramente lo más probable es que se pueda colocar el sello Premium a todos los productos del lote (92.12%), lo cual hace que la ganancia esperada sea cercana a 800000 bolívares fuertes para el lote completo.